Сопряженные операторы в спектральных задачах. Метод Фурье

Лектор: д.ф.м.н., профессор
Темирбеков Н.М.

Вещественные функции, квадратично суммируемые в некоторой области определения $\Omega \subset R^n (n \geq 1)$, т.е.

$$\int_{\Omega} u^2(x)dx \leq c < \infty, (2.1)$$

где x – обобщенная координата. класс таких функций образует гильбертово пространство $H = L_2(\Omega)$.

В этом пространстве определим скалярное произведение

$$(u, \omega) = \int_{\Omega} v\omega dx. \ (2.2)$$

Рассмотрим далее линейный оператор A, действующий на функции v, принадлежащие множеству $D(A)$, каждый элемент которого наряду с условием (2.1) удовлетворяет таким условиям гладкости, что оператор A, действующий на функции v, имеет смысл и Av принадлежит гильбертову пространству $H = L_2(\Omega)$.

Предположим, что функции v удовлетворяют определенным граничным условиям и $D(A)$ плотно в H. Введем теперь в рассмотрение функции ω, принадлежащие новому множеству $D(A^*)$, свойства которого будут установлены в дальнейшем.

Введем в рассмотрение сопряженный оператор A^*, удовлетворяющий следующему тождеству Лагранжа:

$(Av, \omega) = (v, A^*\omega)$, (2.3)

где $v \in D(A), \omega \in D(A^*)$.

Оператор A и функции v, ω вещественны.

Алгоритмически левую часть выражения (2.3) обычно удается преобразовать в выражение, стоящее в правой части, на основе интегро-дифференциальных преобразований типа формулы Грина, интегрирования по частям и т.д. При этих преобразованиях появляются некоторые дополнительные члены, не входящие в структуру выражения $(v, A^*\omega)$ и зависящие от функций v и ω на границе области Ω. Совокупность этих дополнительных членов необходимо положить равной нулю. Используя граничные условия для функции v , можно получить те граничные условия для ω, которые позволяют выполнить тождество (2.3). В процессе преобразования (Av, ω) в $(v, A^*\omega)$ требуется наложение определенных условий гладкости на функцию ω , чтобы выражение $A^*\omega$ имело смысл и являлось функцией пространства $H = L_2(\Omega)$.

Квадратичная суммируемость функции ω вместе с соответствующими требованиями к гладкости и граничные условия позволяют определить апостериори множество $D(A^*)$. Такова общая схема определения сопряженного оператора A^* и его области определения $D(A^*)$.

когда $A^* = A$ и $D(A^*) = D(A)$, оператор A является самосопряженным.

Для несамосопряженных операторов необходимо рассматривать два однородных уравнения:

$$Av = \lambda v, v \in D(A),$$

$$A^*\omega = \lambda\omega, \omega \in D(A^*). \quad (2.4)$$

Обе спектральные задачи (2.4) допускают существование двух полных в H вещественных систем собственных функций: основных $\{v_k\}$ и сопряженных $\{\omega_k\}$, соответствующих собственным значениями $\{\lambda_k\}(k = 1,2, \dots)^1$

Две собственные функции v_k и ω_k, удовлетворяющие соответственно задачам

$$Av_k = \lambda_k v_k,$$

$$A^* \omega_n = \lambda_n \omega_n. \ (2.5)$$

Умножим скалярно первое из уравнений (2.5) на ω_n, а второе на v_k и результаты вычтем один из другого. Получим

$$(Av_k, \omega_n) - (v_k, A^* \omega_n) = (\lambda_k - \lambda_n)(v_k, \omega_n),$$

$$n = 1,2, \dots, k = 1,2, \dots . \ (2.6)$$

Поскольку операторы A и A^* сопряженные, то левая часть соотношения (2.6) обращается в нуль вследствие тождества Лагранжа, и мы будем иметь

$(\lambda_k - \lambda_n)(v_k, \omega_n) = 0.$ (2.7)

Если $k \neq n$ и $\lambda_k \neq \lambda_n$, то для выполнения этого соотношения необходимо, чтобы

$(v_k, \omega_n) = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ (v_n, \omega_n), & k = n. \end{cases}$ (2.8) – биортогональность.

$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n v_n,$ (2.9)-в виде Фурье.

где f_n- искомые коэффициенты Фурье.

Умножим ряд (2.9) почленно на функцию ω_k. Тогда

$(f, \omega_k) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n (v_n, \omega_k)$, (2.10)

С учетом соотношения биортогональности (2.8) все члены ряда, кроме $n = k$, обратятся в нуль, и в результате получим

$(f, \omega_k) = f_k (v_k, \omega_k)$. (2.11)

Отсюда следует, что

$f_k = (f, \omega_k)/(v_k, \omega_k)$. (2.12)

при разложении функции f в ряд необходимо доказать, что ряд (2.9) сходится к этой функции.

Аналогичным образом можно осуществить разложение любой функции $g \in H$ в ряд по собственным функциям ω_n сопряженного оператора:

$g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \omega_n$. (2.13)

Приходим к выражению для коэффициента Фурье g_n:

$g_n = \frac{v_n, g}{v_n, \omega_n}$. (2.14)

Пусть рассматривается задача

$A\varphi = f$, (2.15)

где $\varphi \in D(A)$, а $f \in H$.

Решение φ и функцию f представим в виде рядов Фурье:

$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n v_n, \ f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n v_n$. (2.16)

Умножим скалярно уравнение (2.15) на ω_k и получим

$(A\varphi, \omega_k) = (f, \omega_k)$. (2.17)

В это соотношение подставим ряды (2.16). Тогда

$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n (A v_n, \omega_k) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n (v_n, \omega_k)$. (2.18)

В соответствии с (2.5) имеем

$A v_n = \lambda_n v_n$,

От биортогональности функции v_n и ω_n, получаем

$\lambda_k \varphi_k (v_k, \omega_k) = f_k (v_k, \omega_k)$. (2.19)

$\varphi_k = f_k / \lambda_k$.

решение задачи найдется в виде

$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n v_n}{\lambda_n}$. (2.20)

Пример:

$$-\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d\varphi}{dx}=e^{\frac{x}{2}}sin2\pi x, x \in (0,1), \varphi(0)=\varphi(1)=0. (2.21)$$

Эту задачу можно записать в операторном виде (2.15), где $f(x)=e^{x/2}sin2\pi x$, а оператор $A=-\frac{d^2}{dx^2}+d/dx$ определен в лекции 1 (см.(1.34)).

Решение задачи (2.21) можно найти методом Фурье по формуле (2.20):

$$\varphi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n v_n}{\lambda_n}. (2.22)$$

где $f_n=(f,\omega_n)/(v_n,\omega_n)$. Здесь v_k и ω_k – собственные функции задач (2.5), которые в данном случае имею вид

$$-\frac{d^2 v_k}{dx^2}+\frac{dv_k}{dx}=\lambda_k v_k, x \in (0,1), v_k\,(0)=v_k(1)=0; (2.23)$$

$$-\frac{d^2\omega_n}{dx^2}-\frac{d\omega_n}{dx}=\lambda_n\omega_n, x \in (0,1), \omega_n(0)=\omega_n(1)=0.$$

(2.24)

$\lambda_k = \frac{1}{4} + \pi^2 k^2, v_k(x) = e^{x/2} sin\pi kx, \omega_n(x) = e^{-x/2} sin\pi nx,$

$$(v_k, \omega_n) = \frac{1}{2}\delta_{kn}, \delta_{kn} = \begin{cases} 1, k = n, \\ 0, k \neq n. \end{cases}$$

Используя эти равенства, вычислим f_n:

$f_n = \frac{(f,\omega_n)}{(v_n,\omega_n)} = 2\int_0^1 sin2\pi x sin\pi nx dx = \delta_{2n}.$

Тогда по формуле (2.22) определяем решение φ задачи (2.21):

$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n v_n}{\lambda_n} = \frac{4}{1+16\pi^2} e^{x/2} sin2\pi x,$ (2.25)

что можно проверить непосредственной подстановкой φ в (2.21).

Пусть теперь рассматривается сопряженная задача с оператором A^*:

$A^*\varphi^* = p,$ (2.26)

где $\varphi^* \in D(A^*), p \in H.$

Список литературы:

1.Марчук Г.И. Сопряженные уравнения: Курс лекций.-М.:ИВМ РАН, 2000. – 175 с.